

# MATHEMATICAL SCIENCES

## THEORETICAL - METHODOLOGICAL ASPECTS STUDY OF IDENTICAL TRANSFORMATIONS OF RATIONAL AND IRRATIONAL EXPRESSIONS

**Yarova O.**

*Candidate of Physics and Mathematics,  
доцент кафедри вищої математики  
Associate Professor University of State Fiscal service of Ukraine  
m. Irpin*

**Romanchenko N.**

*higher education  
University of State Fiscal service of Ukraine  
m. Irpin*

## ТЕОРЕТИЧНО – МЕТОДОЛІГІЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТОТОЖНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ РАЦІОНАЛЬНИХ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

**Ярова О.А.**

*кандидат фізико-математичних наук, доцент  
доцент кафедри вищої математики  
Університет державної фіскальної служби України  
м. Ірпін*

**Романченко Н.М.**

*здобувач вищої освіти  
Університет державної фіскальної служби України  
м. Ірпін*

DOI: [10.24412/3453-9875-2021-76-1-6-10](https://doi.org/10.24412/3453-9875-2021-76-1-6-10)

### Abstract

The article considers the theoretical and practical aspects of teaching the topic "Study of identical transformations of rational and irrational expressions" in educational institutions. Recommendations for acquainting students with the basic methods of solving rational and irrational expressions are summarized. The content of each method is revealed, the peculiarities of their use are indicated, the application of each method is illustrated on specific examples. Recommendations for teaching this topic in secondary schools using innovative methods are also provided

### Анотація

У статті розглянуто теоретичні та практичні аспекти викладання теми «Вивчення тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів» у закладах освіти. Узагальнено рекомендації щодо ознайомлення учнів із основними методами розв'язування раціональних та ірраціональних виразів. Розкрито зміст кожного методу, вказано особливості їх використання, проілюстровано застосування кожного методу на конкретних прикладах. Також надано рекомендації щодо викладання даної теми в загальноосвітніх закладах з використанням інноваційних методів

**Keywords:** math; expression; identity; inequalities; equations, rational and irrational expressions.

**Ключові слова:** математика; вираз; тотожність; нерівності; рівняння, раціональні та ірраціональні вирази.

**Вступ.** Як відомо, в математиці існують різні методи навчання. У кожного вчителя індивідуальний підхід щодо організації навчальної роботи, а також навчально-пізнавальної діяльності учнів під час ознайомлення з новим матеріалом та розв'язуванні різних дидактичних задач для того, щоб діти краще засвоїли матеріал.

Існують різні методи подачі нового матеріалу:

- використовувати різні джерела (словесні, наочні, практичні);
- застосовувати різні способи організації навчальної діяльності;
- подача нового матеріалу у вигляді лекції, пояснення;

- робота з підручником;
- робота за алгоритмом;
- дослідницький.

Наведемо приклади деяких методів навчання:

- **пояснювальний – ілюстративний метод** (використовують, вводячи математичні поняття, вивчаючи аксіоми, теореми і способи розв'язування задач різних типів);
- **репродуктивний метод** використовується для закріплення на уроці нового матеріалу, перевірки домашнього завдання;
- **проблемний виклад** полягає в тому, що, пояснюючи навчальний матеріал, учитель сам висуває проблеми і, як правило, він їх і розв'язує;

- **частково-пошуковий метод** (евристична бесіда) полягає в тому, що вчитель заздалегідь готує систему запитань, відповідаючи на які, учні самостійно формулюють визначення та значення поняття, «відкривають» доведення теореми, знаходять спосіб розв'язування задачі;

- **дослідницький метод** передбачає самостійний пошук розв'язання пізнавальної задачі;

- **метод доцільних задач** належить до методів проблемного навчання;

- **абстрактно-дедуктивний метод** – під час вивчення нового матеріалу вчитель відразу сам повідомляє означення понять, що вводяться, а потім наводить конкретні приклади об'єктів, що належать до понять;

- **конкретно-індуктивний метод** – пояснення нового матеріалу починається з розгляду прикладів.

Використовуючи різні методи, способи та засоби навчання вчитель намагається донести до учня необхідну інформацію та в кінцевому результаті оцінити здобуті учнем знання та навички.

**Методики і методи дослідження.** Курс предмета ставить перед собою завдання – маючи певний запас знань і умінь, необхідно систематизувати, поглибити і розширити знання, навички й уміння учнів про вирази та їх перетворення. Навчити цілеспрямовано використовувати їх під час виконання різних навчальних задач, стверджує Слєпкань З.І. [1].

Розглянемо методи та засоби, якими користуються педагоги-методисти для викладання теми «Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів».

Тотожні перетворення алгебраїчних виразів становлять одну з основних методичних ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу.

Вміння виконувати тотожні перетворення з раціональними та ірраціональними виразами знадобляться при спрощенні виразів, розв'язуванні нерівностей, доведенні тотожностей, розв'язуванні задач.

Основні методичні підходи в навчанні тотожним перетворенням:

**Перший** - від завчання правил тотожних перетворень до вироблення умінь і навичок завдяки великій кількості вправ.

**Другий** – передбачає скорочення їх, розглядання суті і генезису тотожних перетворень і вдумливого виконання їх на вказаній математичній основі доведених раніше властивостей різних виразів [2].

**Результати та їх обговорення.** Як вважає Моторіна В.Г. [2], процес оволодіння учнями знаннями, уміннями і навичками щодо виконання тотожних перетворень є складним і тривалим. Він складається із повідомлення нових теоретичних відомостей, показу способів виконання тотожних перетворень і вироблення умінь і навичок. Викладання теоретичного матеріалу при вивченні тотожних перетворень займає значно менше часу, ніж відпрацювання умінь і навичок.

На її думку, для отримання навичок тотожних перетворень необхідно застосовувати метод *письмових та усних* вправ [2]:

1) вправи на застосування вивченого правила, формули, алгоритму;

2) поступове ускладнення виразів введенням більш складних числових коефіцієнтів, показників степенів або з інших причин;

3) виконання задач на декілька дій та встановлення зв'язків з раніше розглянутими тотожностями;

4) застосування вивченої формули для розв'язання задач будь-якої складності та тематики.

Однією з умов ефективності вироблення міцних навичок, з досвіду Моторіної В.Г. [2], є *правильна організація роботи учнів із системою вправ*.

При цьому необхідно: чітко сформулювати мету; скласти алгоритм; пояснити окремо кожну операцію; вибрати правильний темп роботи над виконанням вправ; забезпечити самостійність виконання роботи; використовувати роздатковий матеріал; блок усних вправ на кожному уроці; ознайомити учнів з прийомами самоконтролю при виконанні тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів.

Завдання вчителя при вивченні тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів сформулювати в учнів навички, які могли б відповідати певним якостям: усвідомленість, правильність, узагальнюваність, раціоналістичність, автоматизм і міцність.

Для здобуття цих навичок Моторіна В.Г. [2] не рекомендує швидко переходити від усних міркувань та розгорнутих письмових відповідей за запропонованим алгоритмом дій до згорнутих письмових записів. При скороченій формі запису учні багато часу витрачають на усне виконання більшості розглянутих раніше перетворень, а не на обмірковування суті завдання. Виконуючи усно багато вправ, учні швидко стомлюються, знижується увага, перенавантажуються пам'ять. При усвідомленні учнями послідовності розв'язання – можна згорнути записи.

Розглянемо запропоноване Моторіною В.Г. [2], удосконалення методики формування навиків тотожних перетворень алгебраїчних виразів:

1) повинно йти в напрямку поступового переходу з початкового рівня елементарних однокрокових завдань до рівня нескладних комбінованих вправ і при цьому мати на увазі, що поступове зниження рівня сформованості навичок тотожних перетворень говорить про недостатню роботу в процесі навчання на підтримання цих навичок; постійне підтримування навичок тотожних перетворень на даному рівні забезпечує їх міцність через систему усних вправ, математичних диктантів, звернення в разі необхідності до розгорнутих письмових записів і усному їх обґрунтуванню, постійне використання елементарних навичок в комбінованих вправах;

2) ціленаправлена робота на попередження і виправлення помилок (виявлення помилок в про-

цесі вивчення тотожних перетворень виразів, систематизація помилок, виявлення причин виникнення помилок, організація роботи по усуненню помилок).

При роботі з класом учителю необхідно зосереджуватися на основних стандартних перетвореннях. Розглядаючи комбіновані вправи на тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів, потрібно підбирати завдання на дві-три дії.

Визначаючи рівень складності тотожних перетворень для формування в учнів відповідних умінь і навичок, можна застосувати такі критерії:

- значущість тотожних перетворень;
- безпосередні потреби шкільної математики і її застосування;
- потреби суміжних дисциплін і в майбутньому здобуття освіти у вищій школі.

Для усвідомлення учнями завдань, успішного їх вирішення при розв'язуванні вправ на тотожні перетворення алгебраїчних виразів необхідно користуватися принципом переходу від простого до складного, без усіляких труднощів. Поступово додавати елементи новизни в кожну нову серію вправ для успішного переходу до нового етапу.

Щоб учень міг засвоїти алгоритм дій та перейти до самостійного виконання перетворень раціональних та ірраціональних виразів, учитель повинен на перших уроках відображувати всі записи без скорочень. Враховуючи індивідуальне сприйняття нової інформації кожним учнем, потрібно записи скорочувати поступово [2].

Необхідно формулювати алгоритми послідовності дій при виконанні тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів (наприклад, відшукування спільного знаменника). Алгоритм необхідно створювати за допомогою математичних термінів, але простою, доступною для сприйняття мовою, використовуючи такі прийоми, які б забезпечили повне розуміння теоретичних обґрунтувань та можливість переходу від однієї дії до іншої.

Також виникає необхідність у проведенні аналогії (наприклад, між дробами і дробово-раціональними виразами) [1].

На думку Слєпкань З.І. [1], основною метою перетворення раціональних виразів, до складу яких входять цілі і дробові вирази, є перетворення їх у дріб, чисельник і знаменник якого є цілими раціональними виразами. Буває, що внаслідок перетворення отримуємо дріб не тотожно рівний даному раціональному виразу, внаслідок зміни області визначення, тоді у відповіді разом із знайденим дробом вказується множина, на якій розглядається цей дріб.

В курсі алгебри основної школи учні зустрічаються з такими перетвореннями ірраціональних виразів: перетворення кореня із добутку, дробу, степеня, множення і ділення коренів, винесення множника з-під знака та внесення, звільнення від ірраціональності в знаменнику, зведення подібних доданків, що містять корені.

При введенні нового матеріалу та формуванні навичок тотожних перетворень раціональних та ірраціональних виразів особливу увагу учнів

необхідно звернути на стандартні приклади, де можуть бути помилки, щоб в майбутніх розрахунках та перетвореннях виразів вони їх не допускали [1]. Необхідно показати також учням декілька способів розв'язання того чи іншого прикладу і вказати на більш раціональний, котрий найкраще підходить для даного виразу. А також звернути увагу на ті моменти, де дана дія не застосовується, або є обмеженою.

В автора підручника алгебри для 7-го класу Істер О.С. [3] знаходимо такі способи для доведення тотожності:

- 1) виконати перетворення лівої частини і привести до правої частини;
- 2) виконати перетворення правої частини і привести до лівої частини;
- 3) окремо виконати праву і ліву частини і отримати і в першому, і в другому випадку один і той же вираз;
- 4) скласти різницю лівої і правої частин і в результаті її перетворень отримати нуль.

Отже, різні види тотожності можуть бути розв'язані тим чи іншим способом. Іноді з певними тотожностями можна робити перетворення кількома способами. Метою для вчителя є навчити учнів обирати найраціональніший, найдоцільніший спосіб, який, можливо, індивідуально підходить лише до даної тотожності, але при виконанні якого буде витрачено найменше часу для перетворень та її спрощення. При меншій кількості перетворень є менша вірогідність зробити помилку.

Журавель В.М. у своїй статті [4] показала, як за допомогою тотожних перетворень раціональних виразів можна довести тотожності різними способами, а саме:

*Завдання:* Доведіть, що коли  $a+b+c=0$ , то  $a^3+b^3+c^3=3abc$  [5].

Позначимо:  $a+b+c=0$  (1),  $a^3+b^3+c^3=3abc$  (2).

Такий вид алгебраїчних виразів називають умовними тотожностями. *Умовна тотожність* – алгебраїчна рівність, права і ліва частини якої тотожно рівні за умови виконання деякого співвідношення (можливо, не одного, а кількох). [6]

*I спосіб.*

З рівності (1) виразимо  $c=-a-b$ .

Перетворимо ліву частину рівності (2) так, щоб отримати праву:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= a^3+b^3+(-a-b)^3=(a+b)(a^2-ab-b^2)-(-a-b)^3= \\ &=(a+b)(a^2-ab-b^2-(a+b)^2)=(a+b)(a^2-ab-b^2-2ab-b^2)= \\ &=(a+b)(-3ab)=(-a-b)(3ab) \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $-a-b=c$ :  $(-a-b)(3ab)=3abc$ . Що і потрібно було довести.

*II спосіб.*

Спочатку піднесемо ліву частину рівності (1) до кубу:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &=(a+b+c)(a+b+c)^2=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+ \\ &+2ab+2bc+2ca)=a^3+b^2a+c^2a+2a^2b+2abc+2a^2c+ \\ &+a^2b+b^3+bc^2+2ab^2+2b^2c+2abc+a^2c+b^2c+ \\ &+c^3+2abc+2bc^2+2ac^2= \\ &=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2+2abc) \end{aligned}$$

Отже,  $a^3+b^3+c^3=-3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2+2abc)$  (3) Далі з рівності (1) виразимо  $a, b, c$ :  $a=-b-c, b=-a-c, c=-a-b$ .

Перетворимо праву частину рівності (2) так, щоб отримати ліву:

$$\begin{aligned} 3abc &= 3(-b-c)(-a-c)(-a-b) = -3(b+c)(a+c)(a+b) = \\ &= -3(bc+ab+c^2+ac)(a+b) = \\ &= -3(abc+a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2+abc) = \\ &= -3(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2+2abc) \end{aligned}$$

Отримали праву частину рівності (3). Отже,  $a^3+b^3+c^3=3abc$ , що й потрібно було довести.

### III спосіб.

Будемо паралельно перетворювати обидві частини рівності (2).

З рівності (1) виразимо  $c = -a-b$  та підставимо це значення:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+(-a-b)^3 &= 3ab(-a-b) \leftrightarrow (a+b)(a^2-ab-b^2)-(a+b)^3 \\ &= -3a^2b-3ab^2 \leftrightarrow (a+b)(a^2-ab-b^2-(a+b)^2) \\ &= -3a^2b-3ab^2 \leftrightarrow (a+b)(a^2-ab-b^2-a^2-2ab-b^2) \\ &= -3a^2b-3ab^2 \leftrightarrow (a+b)(-3ab^2) = -3a^2b-3ab^2 \\ &\leftrightarrow -3a^2b-3ab^2 = -3a^2b-3ab^2 \end{aligned}$$

Отримали однакові вирази зліва і зправа, отже  $a^3+b^3+c^3=3abc$ , що й потрібно було довести.

### IV спосіб.

Розглянемо різницю лівої і правої частини рівності  $a^3+b^3+c^3=3abc$  та з рівності (1) виразимо  $c = -a-b$ .

$$\begin{aligned} a^3+b^3+(-a-b)^3-3ab(-a-b) &= a^3+b^3-(a+b)^3+3ab(a+b) = \\ &= a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3a^2b+3ab^2 \\ &= a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3+3a^2b+3ab^2 = 0 \end{aligned}$$

Різниця дорівнює нулю, отже  $a^3+b^3+c^3=3abc$ , що й потрібно було довести.

Отже, вибір способу доведення тотожності в першу чергу залежить від самого завдання, але кожен учень індивідуально вибирає, які перетворення необхідно зробити і який варіант є найзручнішим в даному випадку. Вивчення алгебри та напрацювання навичок виконання перетворення, спрощення виразів та доведення тотожностей сприятиме розвитку творчого та аналітичного мислення в учнів, а також набуттю дослідницьких та пізнавальних компетентностей.

Такий підхід з використанням алгоритму, послідовним переходом, вибором способу розв'язання задачі та поступовим ускладненням завдань дасть можливість учням перейти до самостійної роботи.

Бевз Г.П. [8] рекомендує таку послідовність вивчення раціональних виразів:

- 1) спочатку згадати, які вирази називають тотожними;
- 2) далі необхідно розглянути основну властивість дробу;
- 3) повторити додавання дробів з однаковими знаменниками;
- 4) повторити додавання дробів з різними знаменниками;
- 5) перейти до множення та ділення двох дробів;
- 6) навчитися спрощувати вирази.

При переході до ірраціональних виразів необхідно:

- 1) пояснити різницю між виразами:  $(\sqrt{a})^2 = a$  та  $(\sqrt{a}) = |a|$ ;
- 2) ввести поняття арифметичного квадратного кореня;

3) вивчити теореми про радикали та навчитися їх застосовувати;

4) навчитися виносити множник з-під знака кореня, а також виносити під знак кореня;

5) виконувати піднесення до степеня (коли показник ціле число, дробове та нульовий).

Тотожні перетворення раціональних виразів вивчаються у 8 класі, а саме скорочення раціональних дробів, додавання і віднімання раціональних дробів, множення, піднесення до степеня з натуральним показником, ділення дробів і тотожні перетворення раціональних виразів, до складу яких входять цілі і дробові вирази.

Виконуючи доведення тотожностей та перетворення виразів, основним завданням є виробити міцні навички в учнів виконувати перелічені вище дії. Дотримуючись цих рекомендацій та послідовності дій, можна виконувати будь-які перетворення раціональних та ірраціональних виразів.

На думку автора [1], учні повинні навчитися:

- розрізняти числові і буквені вирази;
- розуміти зміст степеня з натуральним показником, одночлена, многочлена, алгебраїчного дробу, цілих і дробових виразів, степеня з цілим показником;
- уміти зводити до стандартного вигляду одночлени і многочлени;
- знати формули скороченого множення і вміти застосовувати їх до тотожних перетворень виразів;
- уміти додавати, віднімати, множити многочлени і розкладати їх на множники;
- уміти скорочувати, додавати, віднімати, множити, ділити алгебраїчні дроби;
- уміти зводити дробові вирази до вигляду дробу;
- уміти перетворювати вирази, що містять квадратні корені.

Автор допускає [1], що всі перетворення початкової алгебри – це перетворення виразів на тотожно рівні їм. Отже, потрібно говорити не про додавання і віднімання дробів, а про перетворення суми і різниці дробів на дріб, у якого чисельник і знаменник - многочлени стандартного вигляду. Але використання такої термінології виявилось невдалим. Натомість вдало використовується нині паралельне вивчення прямих і обернених перетворень.

**Основне завдання вчителя** – вироблення повноцінних навичок виконання тотожних перетворень, як показано на практиці [2]. З цієї метою необхідно дотримуватися таких основних умов виконання перетворень раціональних та ірраціональних виразів:

- етапність формування знань, умінь і навичок;
- усвідомлення і запам'ятовування основних алгоритмів (правил);
- оволодіння вміннями виконувати тотожні перетворення за зразком в подібній або відмінній ситуації;
- формування умінь застосовувати алгоритм у нових ситуаціях;

- різноманітність вправ, правильний підбір і організація роботи з ним;
- систематична і цілеспрямована робота щодо виявлення і попередження типових помилок при виконанні тотожних перетворень, навчання учнів самоконтролю;

- систематизація і узагальнення знань учнів.

*Однією з основних вимог* до створення методики вивчення тотожних перетворень у загальноосвітній школі на сьогоднішній день є створення схем, які ілюструють зв'язок понять за темою, а також обов'язковий перелік здобутих знань.

**Висновки.** Розглянуто методики викладання тотожних перетворень у загальноосвітніх закладах та їх удосконалення. Представлено основні вимоги до виконання тотожних перетворень. Визначено основне завдання для вчителя. Показані навички, які здобувають учні при вивченні даної теми. Визначено, що при засвоєнні в учнів навичок і умінь виконання тотожних перетворень різних виразів, потрібно не лише вміти зводити вирази до стандартного вигляду, а також необхідно навчитися подавати вираз у зручному для розв'язування конкретної задачі вигляді.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ:

1. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. – К.: Зодіак-Еко, 2000. – 512 с.

2. Моторіна В.Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку. Навч. посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів. / Моторіна В.Г. - Х.: фірма —РЦНІТІ, 1998 - 160с.

3. Істер О.С. Алгебра: Підруч. для 7 кл загальноосвіт. навч. закл. / Істер О.С. - К.:Освіта, 2007. - 223с.

4. Журавель В.М. Тотожність одна – способи доведення різні//Журавель В.М./ Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами I Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. /Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. –Вінниця, 2017 –269 с. 48-52.

5. Литвиненко В.Н. Практикум по елементарній математике. Алгебра. Тригонометрия./ Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. 3-е изд., перераб. и доп. - М.: АБФ, 1995.— 352 с 3, с. 8

6. Ізюмченко Л. В. Вирази та тотожні перетворення: Методичний посібник для виконання контрольних робіт учнями 10-11 класів. / Л. В. Ізюмченко, Л.І.Лутченко, В.В.Нічишина, Р.Я. Ріжняк / Серія: Навчальні матеріали для учнів заочної фізико-математичної школи. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. – 22с. 2, с. 7.

7. Бєвз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник.– 3-тє вид., перероб. і допов. – К.: Вища шк., 1989. – 367 с.: іл.